



مدارهای منطقی

فصل ۳: تحلیل و طراحی مدارهای منطقی ترکیبی

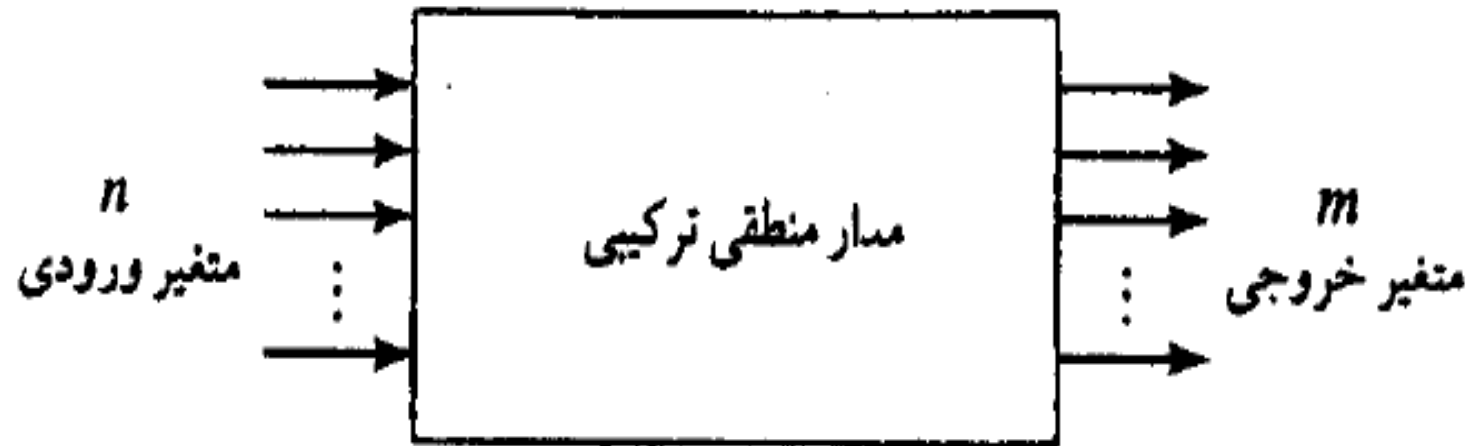
عین الله پیرا

نیمسال اول سال تحصیلی ۹۹-۱۳۹۸

- مدارهای ترکیبی
- روش تحلیل یک مدار ترکیبی
- روش طراحی یک مدار ترکیبی
- جمع کننده - تفریق گر دودویی
- جمع کننده دهدهی (BCD)
- ضرب دودویی
- مقایسه گر مقادیر
- دیکدرها، انکدرها، مالتی پلکسرها و دی مالتی پلکسرها
- حافظه فقط خواندنی (ROM)
- آرایه منطقی برنامه پذیر (PLA) و منطق آرایه ای برنامه پذیر (PAL)

✓ **تعریف:** یک مدار ترکیبی، متشکل از تعدادی گیت منطقی (AND، OR و ...) است که خروجی آنها در هر لحظه مستقیماً توسط ورودی های همان لحظه معین می شود و به ورودی های قبلی بستگی ندارد.

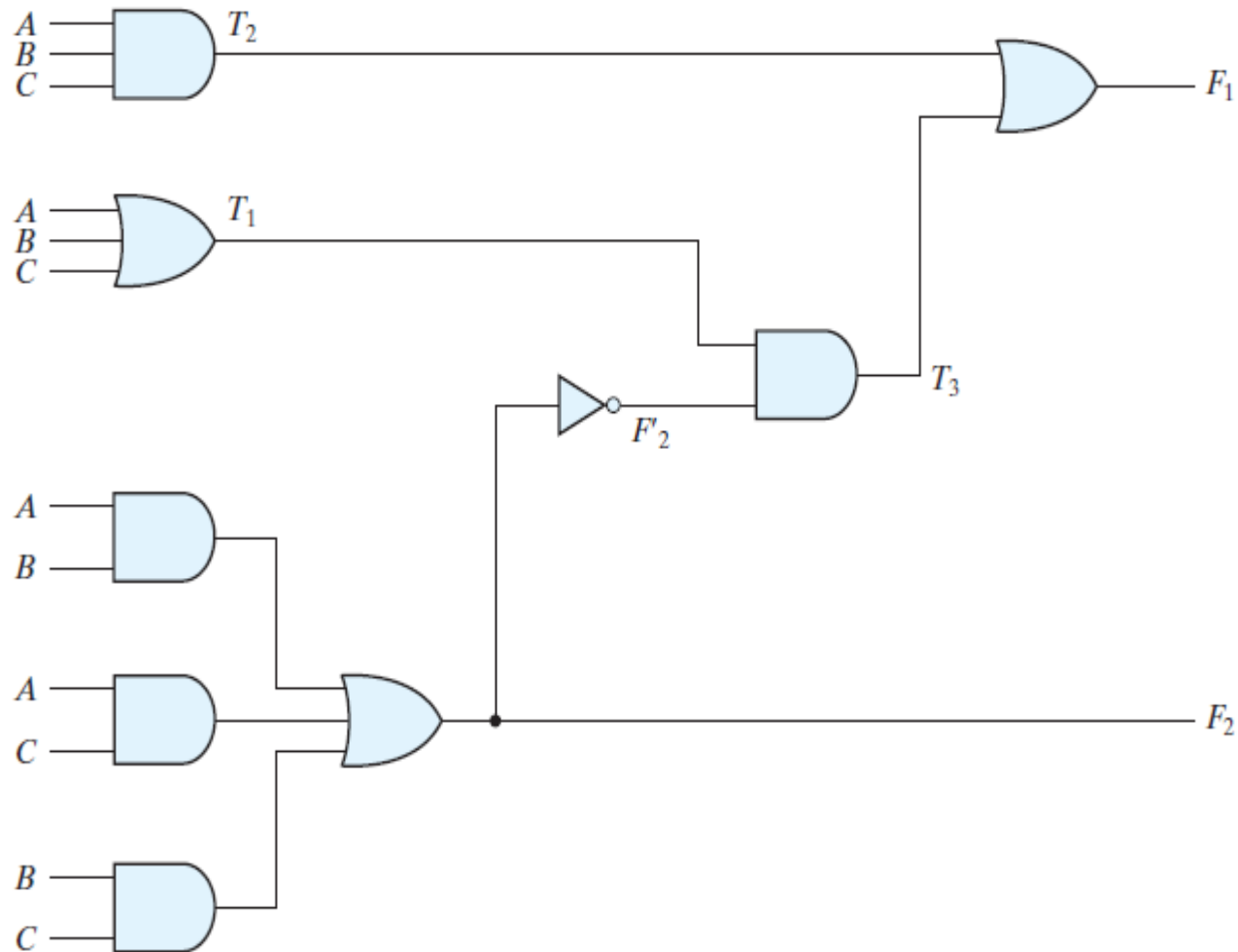
✓ **شکل زیر،** نمودار یک مدار ترکیبی را نشان می دهد.



روش تحلیل یک مدار ترکیبی

✓ هدف از تحلیل یک مدار ترکیبی، بدست آوردن تابعی است که مدار مورد نظر از آن ساخته می شود.

✓ مثال: تابع بولی، مدار زیر را بدست آورید.



$$F_2 = AB + AC + BC$$

$$T_1 = A + B + C$$

$$T_2 = ABC$$

$$T_3 = F_2' T_1$$

$$F_1 = T_3 + T_2$$

$$\begin{aligned} F_1 &= T_3 + T_2 = F_2' T_1 + ABC = (AB + AC + BC)'(A + B + C) + ABC \\ &= (A' + B')(A' + C')(B' + C')(A + B + C) + ABC \\ &= (A' + B'C')(AB' + AC' + BC' + B'C) + ABC \\ &= A'BC' + A'B'C + AB'C' + ABC \end{aligned}$$

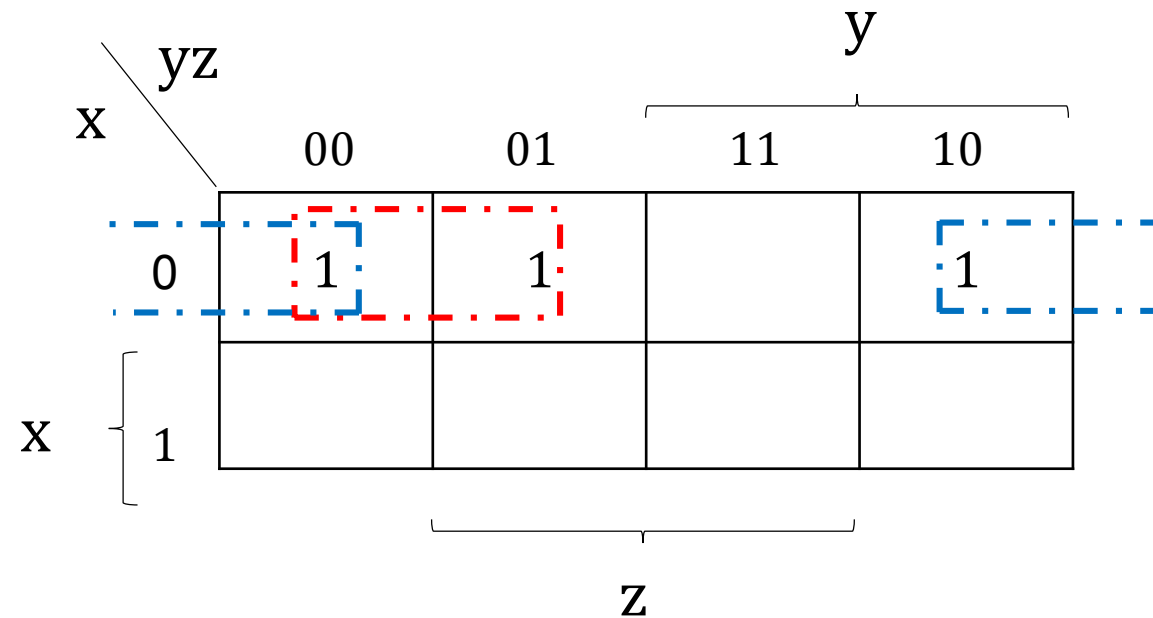
روش طراحی یک مدار ترکیبی

✓ هدف از طراحی یک مدار ترکیبی، طراحی یک مدار منطقی برای مساله مطرح شده می باشد.

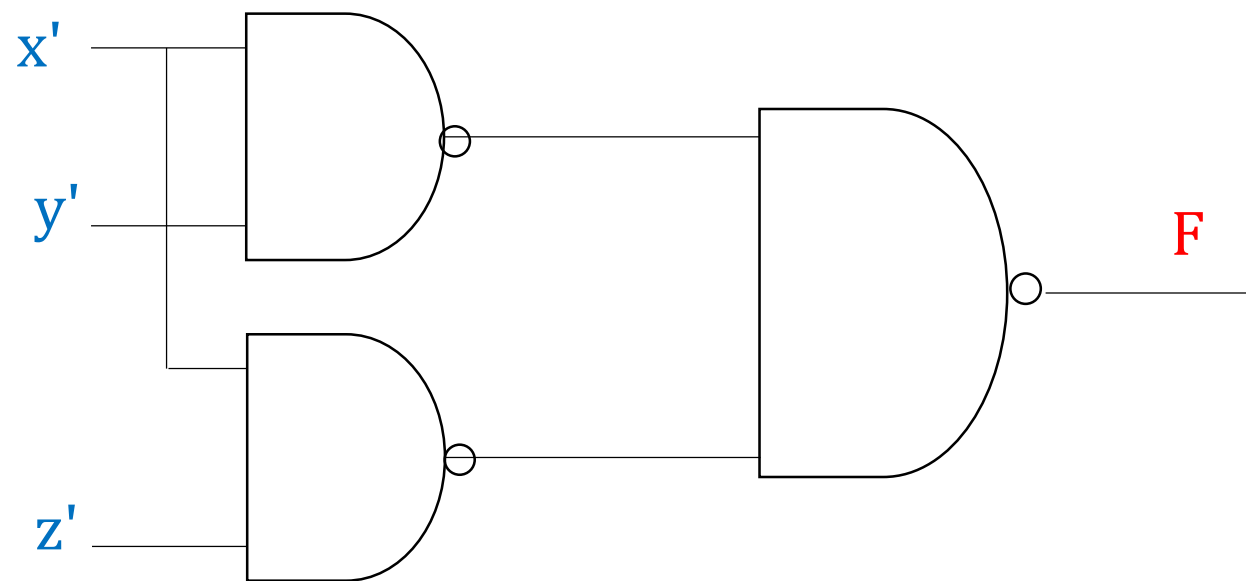
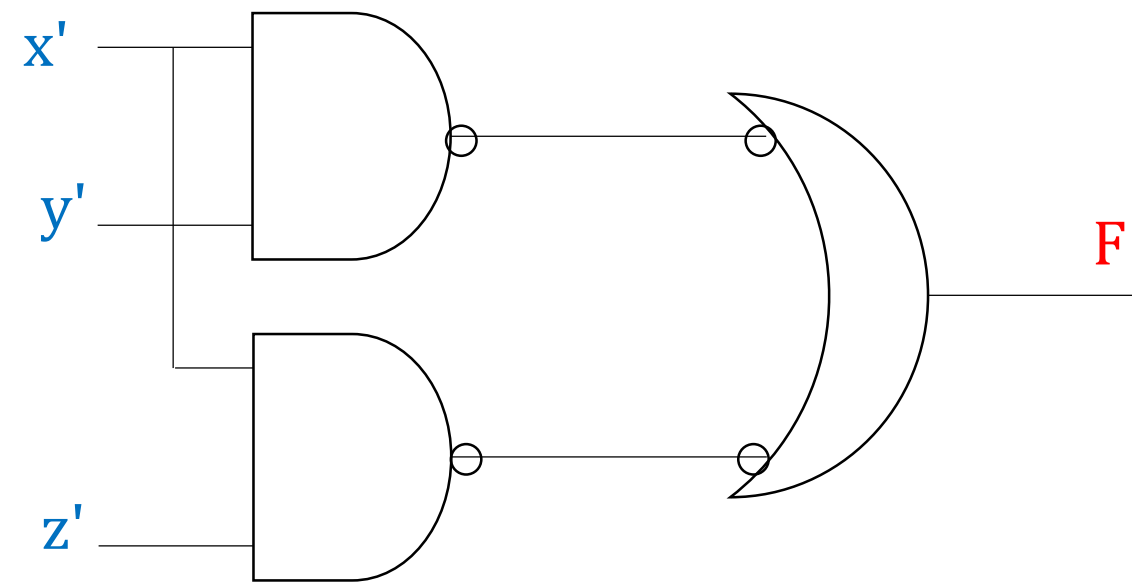
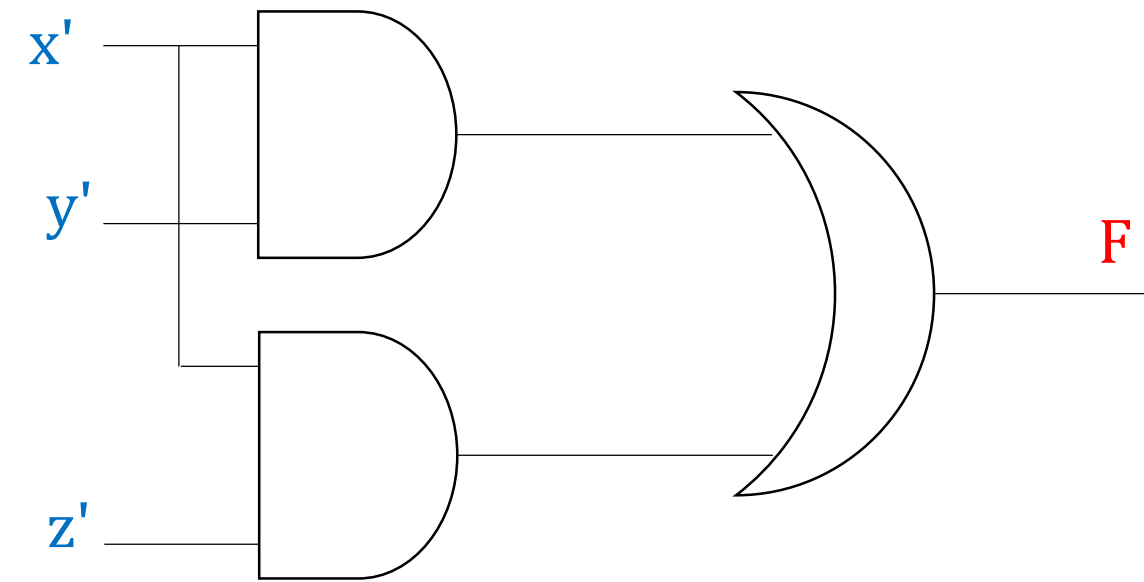
✓ مثال: یک مدار ترکیبی با ۳ ورودی و یک خروجی طراحی کنید. خروجی زمانی ۱ می گردد که مقدار باینری ورودی از عدد ۳ کمتر باشد در غیر اینصورت خروجی ۰ می شود.

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

الف) فقط از گیت های NAND استفاده کنید.

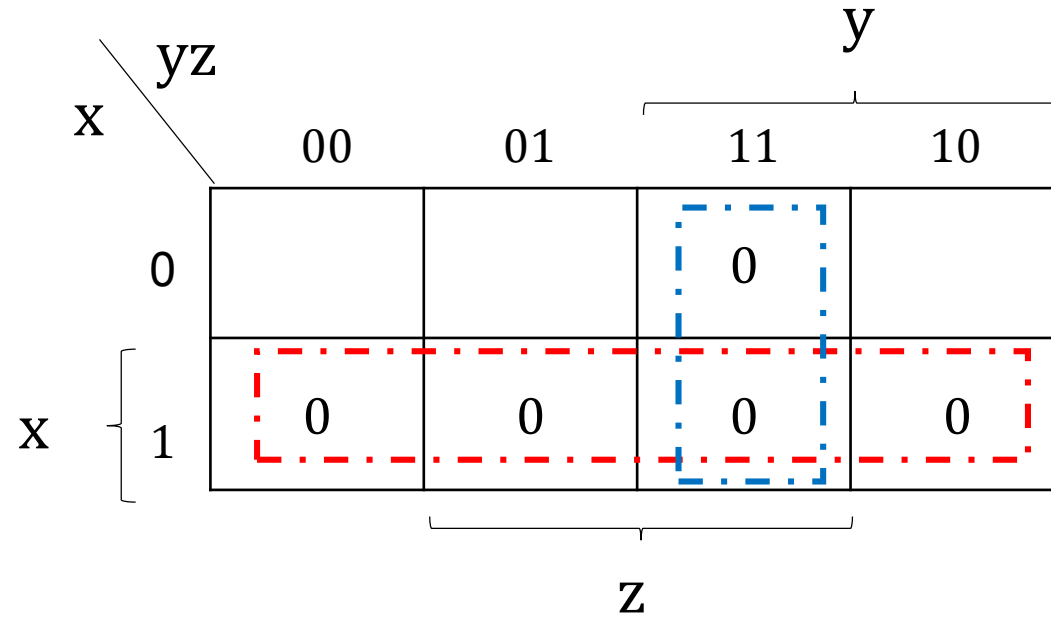


$$\rightarrow F(x,y,z) = x'y' + x'z'$$



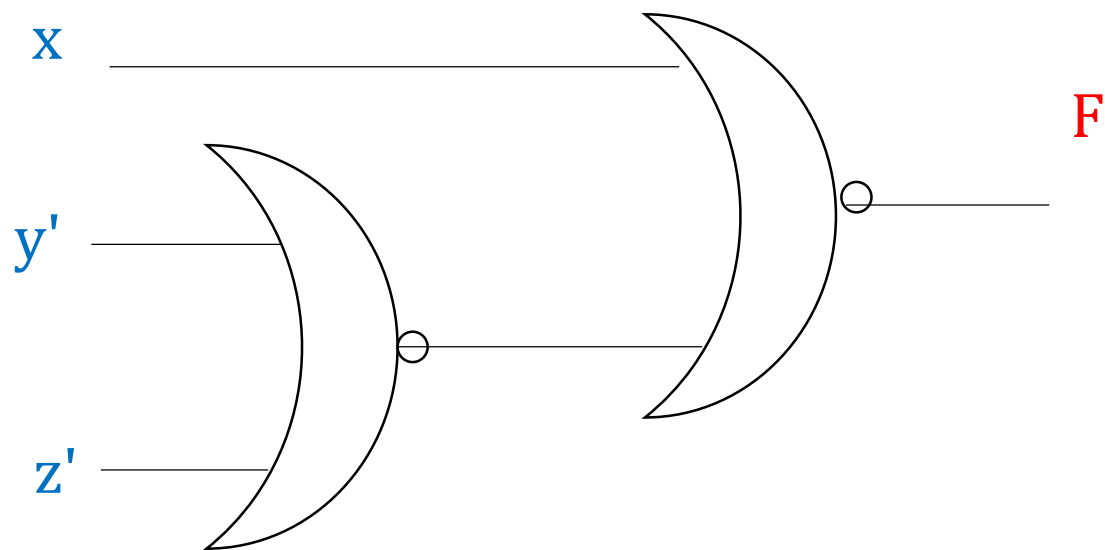
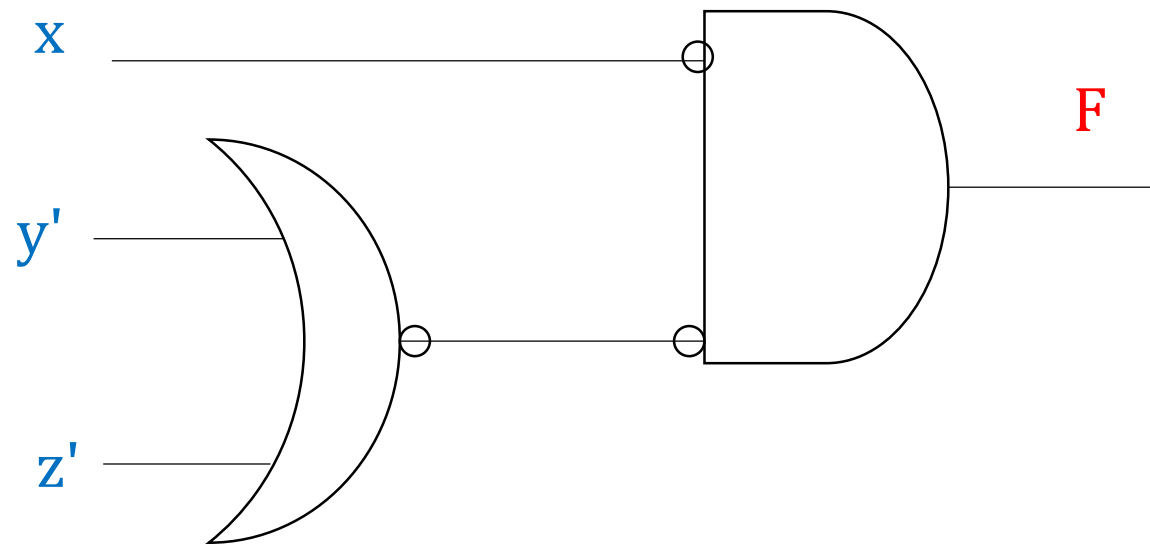
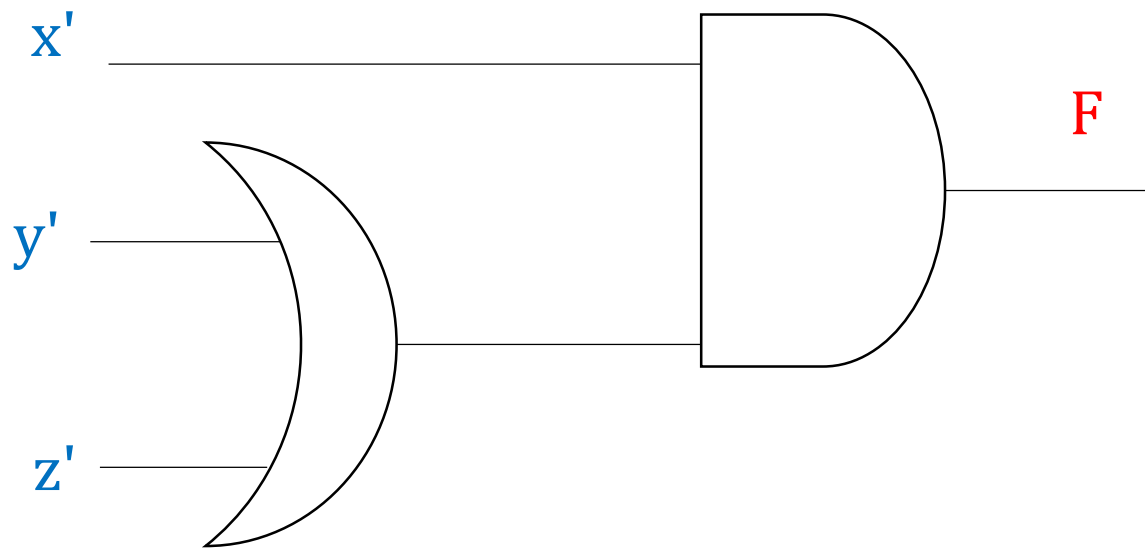
(ب) فقط از گیت های NOR استفاده کنید.

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



→ $F'(x,y,z) = x + yz$

→ $F(x,y,z) = (x + yz)' = x' \cdot (y' + z')$



مثال: یک مدار ترکیبی بعنوان مبدل کد BCD به کد افزونی-۳ طراحی کنید. حداکثر از ۴ گیت AND و ۴ گیت OR استفاده کنید.

جواب: جدول درستی این مدار بصورت زیر خواهد بود:

ورودی BCD				خروجی کد افزونی - 3			
A	B	C	D	w	x	y	z
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0

نکته: اعداد دودویی بیشتر از ۹، به عنوان حالات بی اهمیت در نظر گرفته می شوند.

		<i>C</i>			
		<i>CD</i>	00	01	11
<i>A</i>	<i>AB</i>	00	01	11	10
	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5 1	m_7 1	m_6 1
	11	m_{12} X	m_{13} X	m_{15} X	m_{14} X
10	m_8 1	m_9 1	m_{11} X	m_{10} X	

D

$$w = A + BC + BD$$

		<i>C</i>			
		<i>CD</i>	00	01	11
<i>A</i>	<i>AB</i>	00	01	11	10
	00	m_0	m_1 1	m_3 1	m_2 1
	01	m_4 1	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12} X	m_{13} X	m_{15} X	m_{14} X
10	m_8	m_9 1	m_{11} X	m_{10} X	

D

$$x = B'C + B'D + BC'D'$$

		C			
		CD	00	01	11
A	AB	00	01	11	10
	00	m_0 1	m_1	m_3 1	m_2
	01	m_4 1	m_5	m_7 1	m_6
	11	m_{12} X	m_{13} X	m_{15} X	m_{14} X
10	m_8 1	m_9	m_{11} X	m_{10} X	
		D			

$$y = CD + C'D'$$

		C			
		CD	00	01	11
A	AB	00	01	11	10
	00	m_0 1	m_1	m_3	m_2 1
	01	m_4 1	m_5	m_7	m_6 1
	11	m_{12} X	m_{13} X	m_{15} X	m_{14} X
10	m_8 1	m_9	m_{11} X	m_{10} X	
		D			

$$z = D'$$

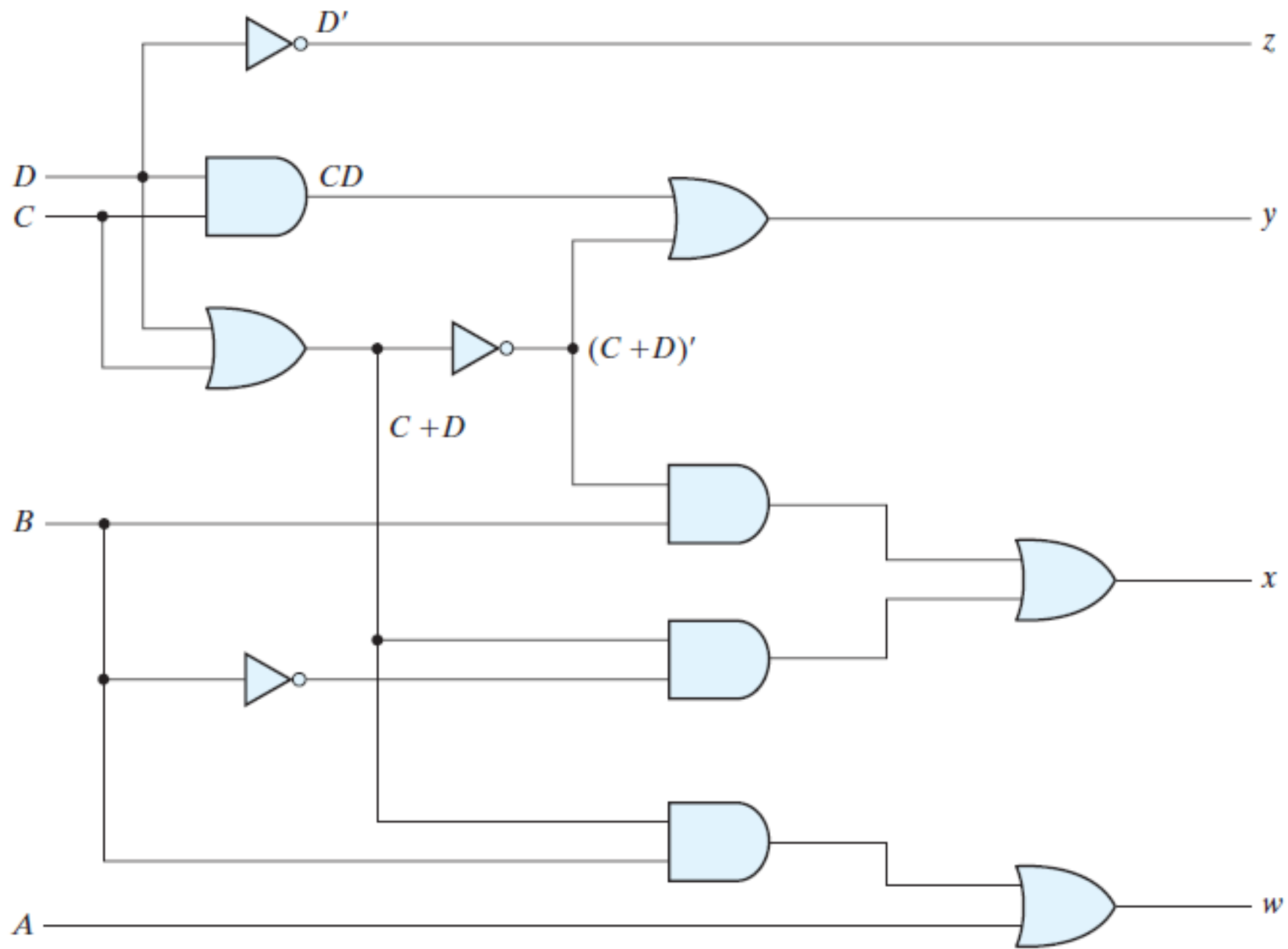
✓ **توابع منطقی بدست آمده** را طوری می نویسیم که در صورت امکان از گیت مشترک استفاده کنند (تعداد گیت ها کمینه شود). در ادامه، توابع منطقی را طوری بازنویسی کرده ایم که عبارت $C+D$ در هر سه تابع دیده می شود.

$$z = D'$$

$$y = CD + C'D' = CD + (C + D)'$$

$$\begin{aligned}x &= B'C + B'D + BC'D' = B'(C + D) + BC'D' \\ &= B'(C + D) + B(C + D)'\end{aligned}$$

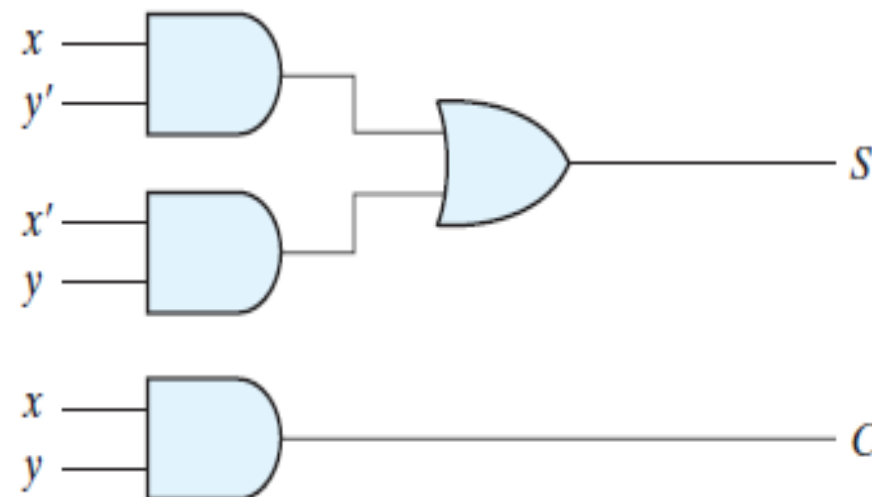
$$w = A + BC + BD = A + B(C + D)$$



نیم جمع کننده (Half Adder)

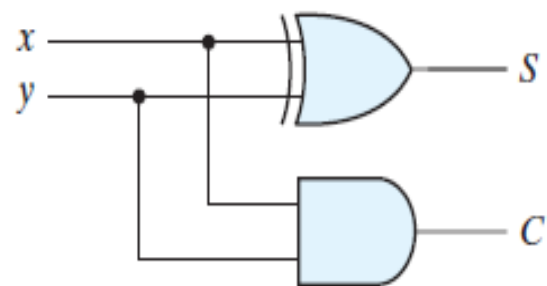
✓ نیم جمع کننده (HA)، یک مدار ترکیبی است که ۲ بیت دودویی x و y را با هم جمع کرده و حاصل جمع S و رقم نقلی C را به عنوان خروجی تولید می کند.

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



$$S = xy' + x'y$$

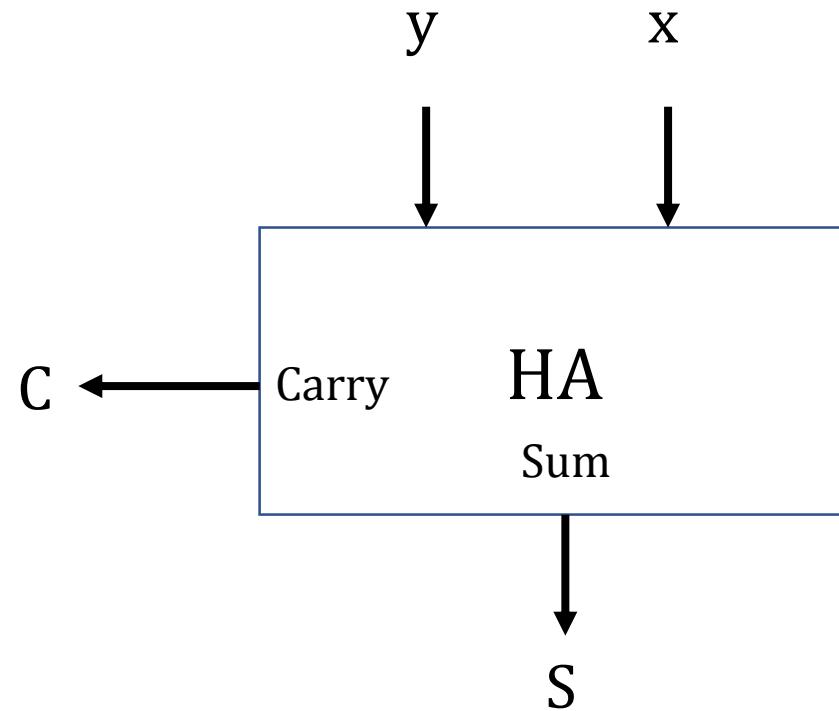
$$C = xy$$



$$S = x \oplus y$$

$$C = xy$$

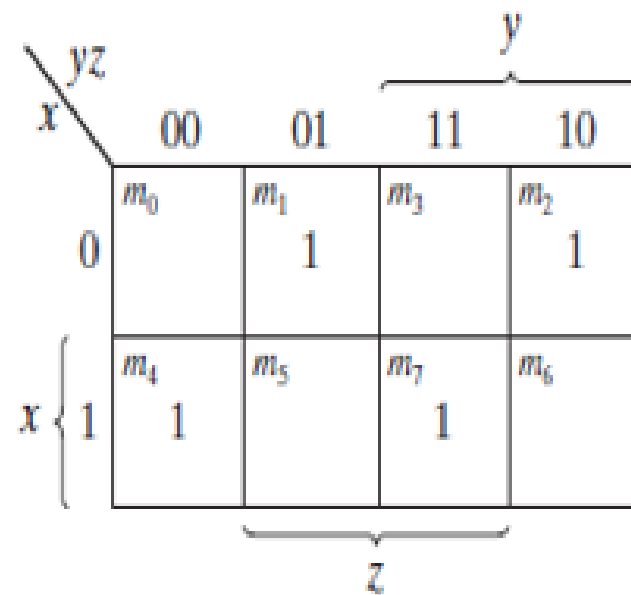
✓ بلوک دیاگرام نیم جمع کننده (HA):



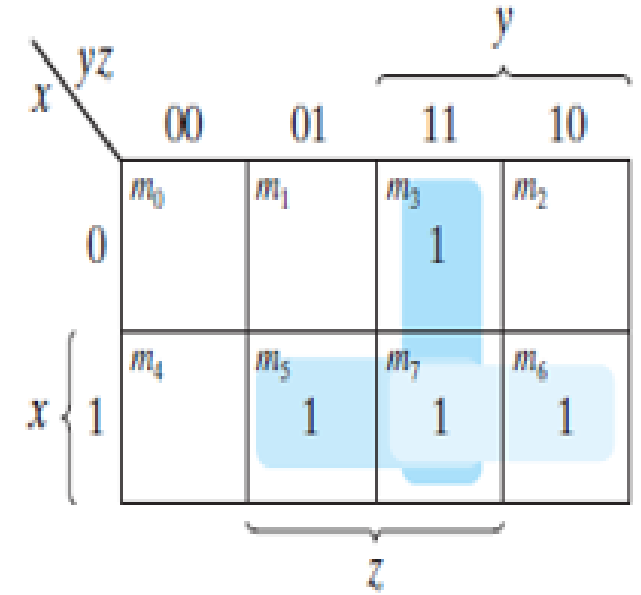
تمام جمع کننده (Full Adder)

✓ تمام جمع کننده (FA)، یک مدار ترکیبی است که ۳ بیت دودویی X (مضاف) و Y (مضاف الیه) و Z (رقم نقلی ورودی) را با هم جمع کرده و حاصل جمع S و رقم نقلی C را به عنوان خروجی تولید می کند.

x	y	z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



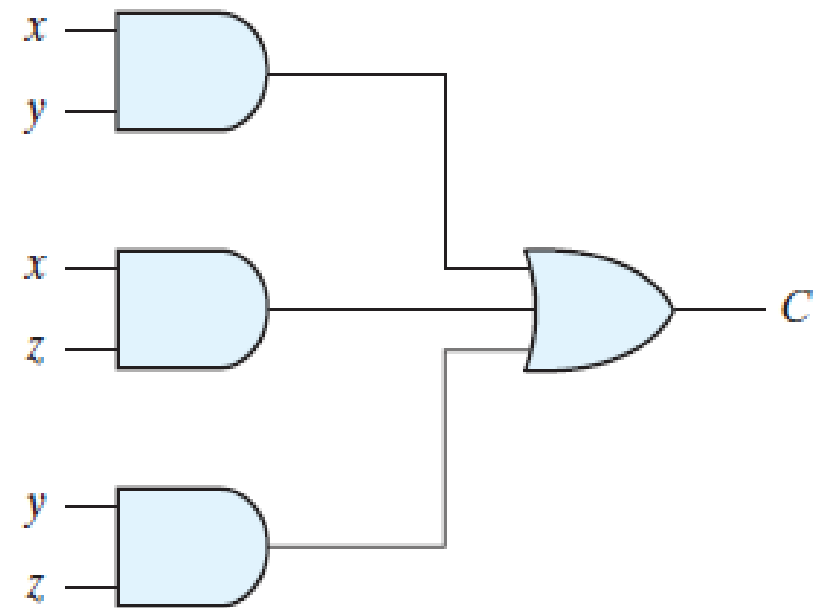
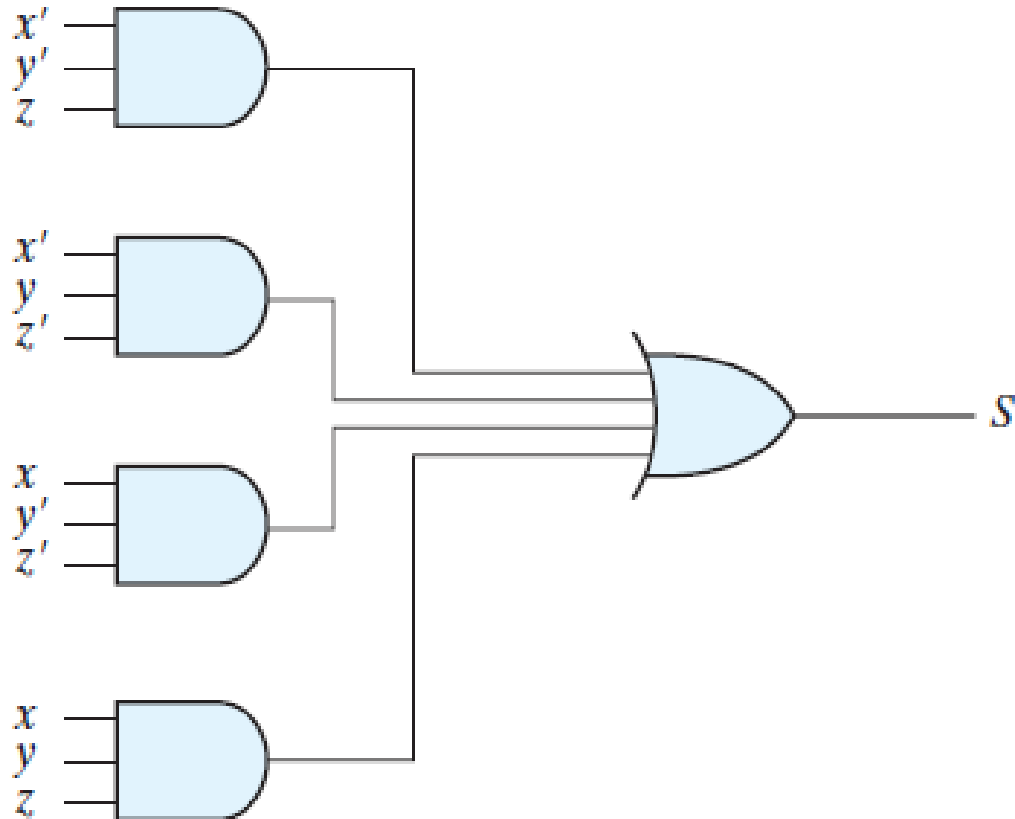
$$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xy$$



$$C = xy + xz + yz$$

$$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$$

$$C = xy + xz + yz$$



✓ کار در کلاس: درستی مورد زیر را بررسی کنید.

$$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz = z \oplus (x \oplus y)$$

جواب: سمت راست را ساده کرده تا به سمت چپ برسیم.

$$z \oplus (x \oplus y) = z(xy' + x'y)' + z'(xy' + x'y)$$

$$= \dots$$

$$= z(xy + x'y') + z'(xy' + x'y)$$

$$= xyz + x'y'z + xy'z' + x'yz'$$

✓ کار در کلاس: درستی مورد زیر را بررسی کنید.

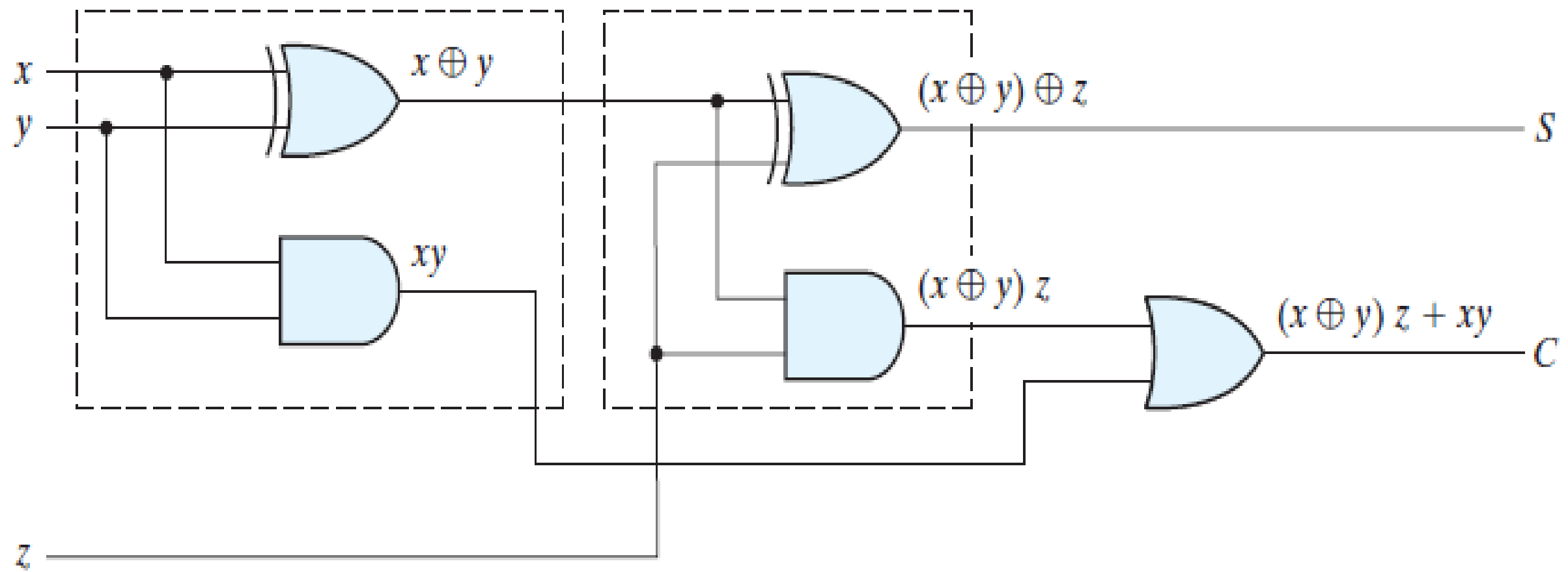
$$C = xy + xz + yz = z(x \oplus y) + xy$$

جواب: سمت راست را ساده کرده تا به سمت چپ برسیم.

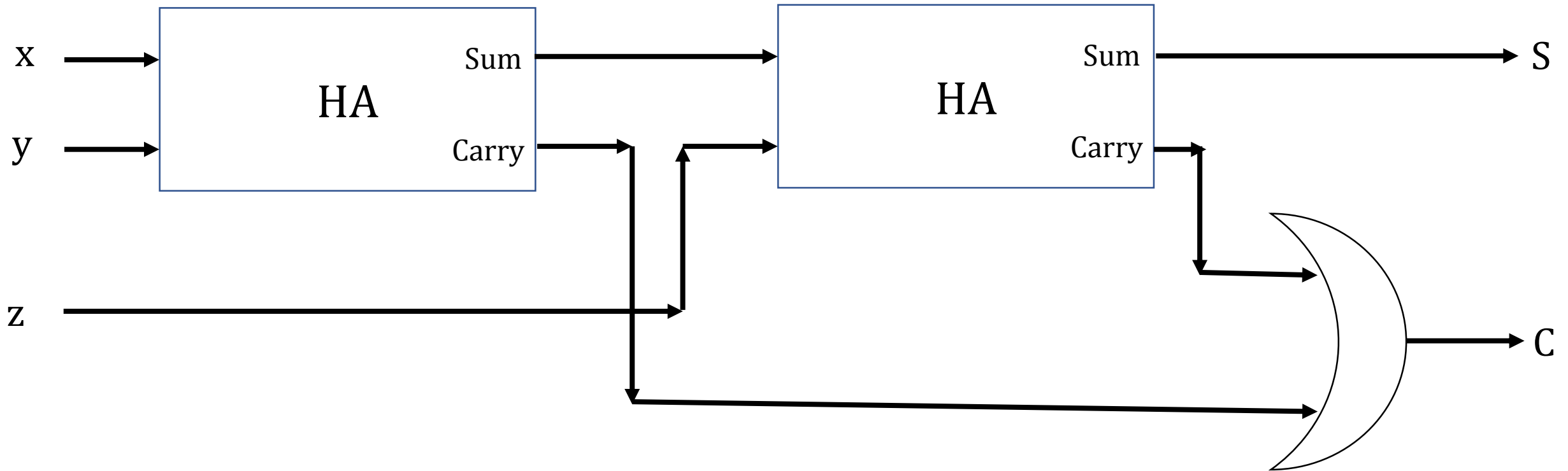
$$z(x \oplus y) + xy = z(xy' + x'y) + xy = xy'z + x'yz + xy = xy'z + xy + x'yz + xy$$

$$= x(y'z + y) + y(x'z + x) = x(y' + y)(z + y) + y(x' + x)(z + x) = xz + xy + yz + xy$$

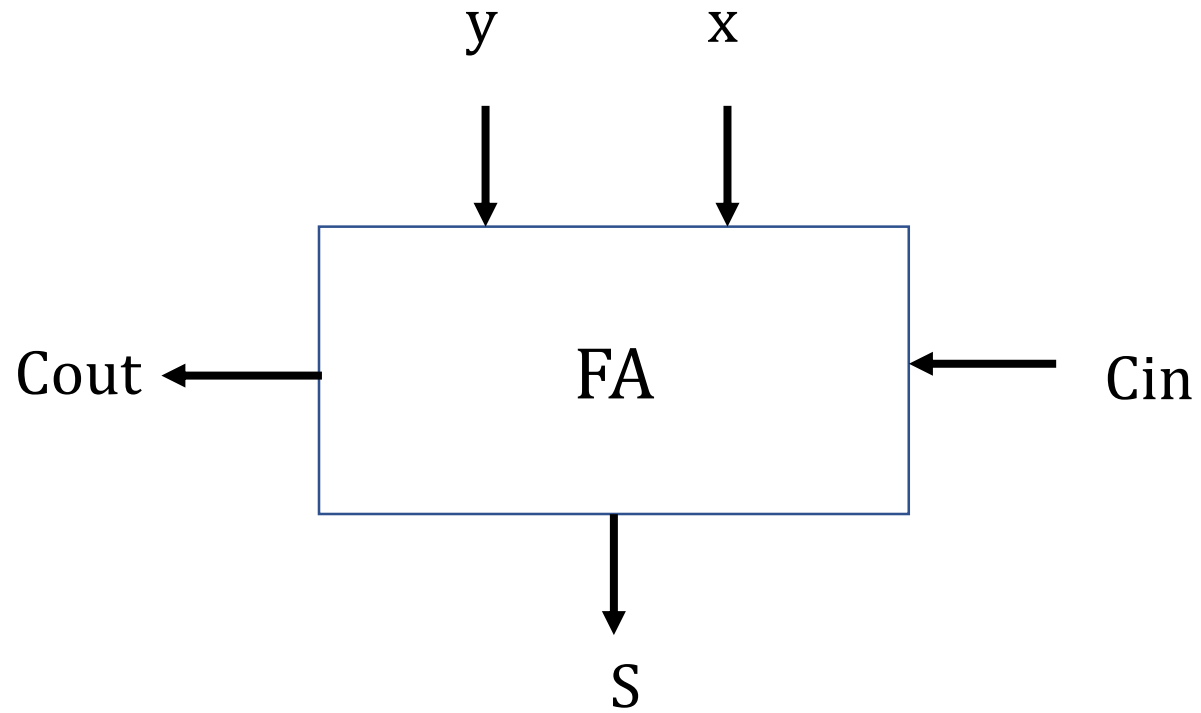
✓ با تغییرات توابع منطقی S و C می توانیم به این نتیجه برسیم که یک FA را می توان با دو HA و یک گیت OR ساخت.



✓ تمام جمع کننده (FA) را می توان با کمک دو HA ساخت.



✓ بلوک دیاگرام تمام جمع کننده (FA):



جمع کننده دودویی

✓ جمع کننده دودویی، یک مدار دیجیتال است که جمع حسابی دو عدد دودویی را تولید می کند.

✓ می توان آن را از به هم پیوستن چندین تمام جمع کننده (FA) ساخت.

✓ خروجی نقلی هر FA، به ورودی نقلی FA بعدی متصل می شود.

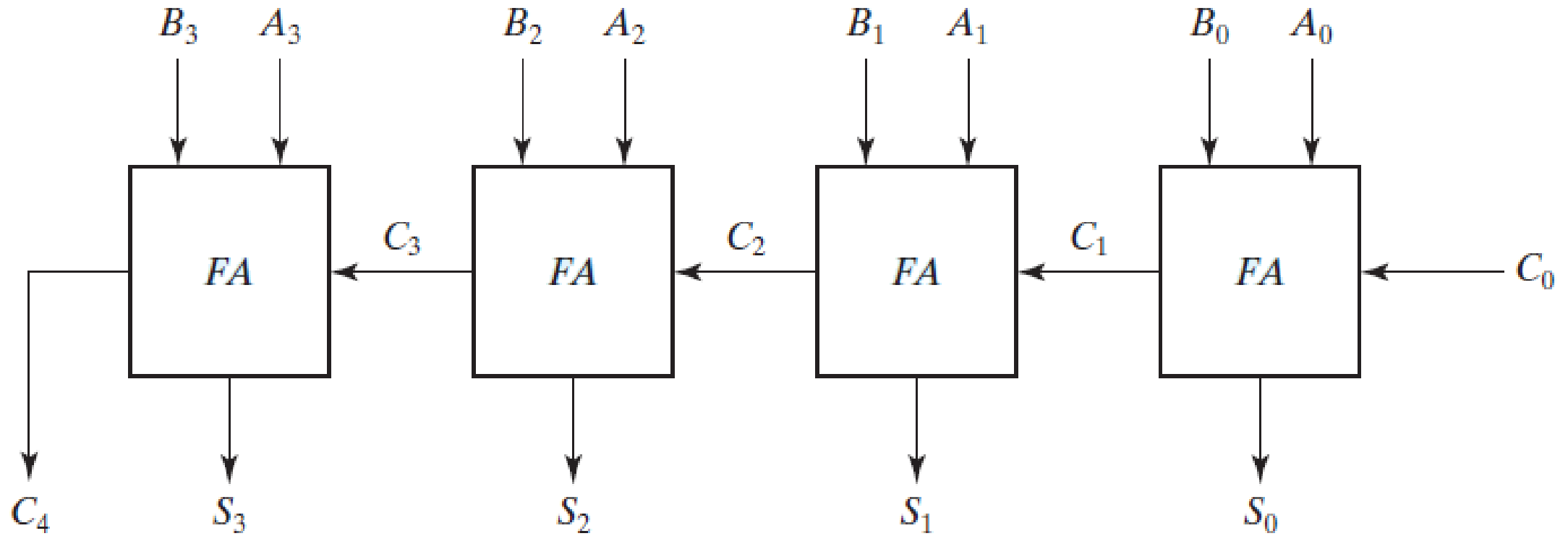
✓ یک جمع کننده دودویی n بیتی به n تا FA نیاز دارد.

✓ رقم های نقلی باید مواج گونه از طریق تمام جمع کننده ها منتشر شوند بنابراین این نوع جمع کننده را موج گونه نیز می گویند.

✓ **بعنوان مثال:** می خواهیم دو عدد $A=1011$ و $B=0011$ را باهم جمع کنیم. حاصل جمع برابر $S=1110$ خواهد بود. معمولا C_0 (رقم نقلی آغازین) را برابر صفر در نظر می گیرند.

: اندیس /	3	2	1	0	
نقلی ورودی	0	1	1	0	C_i
مضاف	1	0	1	1	A_i
مضاف الیه	0	0	1	1	B_i
حاصل جمع	1	1	1	0	S_i
نقلی خروجی	0	0	1	1	C_{i+1}

✓ بلوک دیاگرام جمع کننده دودویی ۴ بیتی



تفریق دودویی

✓ **قبلا گفتیم که** برای محاسبه تفریق دودویی اعداد بدون علامت، از مکمل ۲ استفاده می کنیم.

✓ برای محاسبه $A-B$ کافی است A را به مکمل ۲ عدد B اضافه کنیم.

✓ برای محاسبه مکمل ۲ عدد B ، ابتدا مکمل ۱ آن را بدست آورده سپس عدد ۱ را به عدد حاصله اضافه می کنیم.

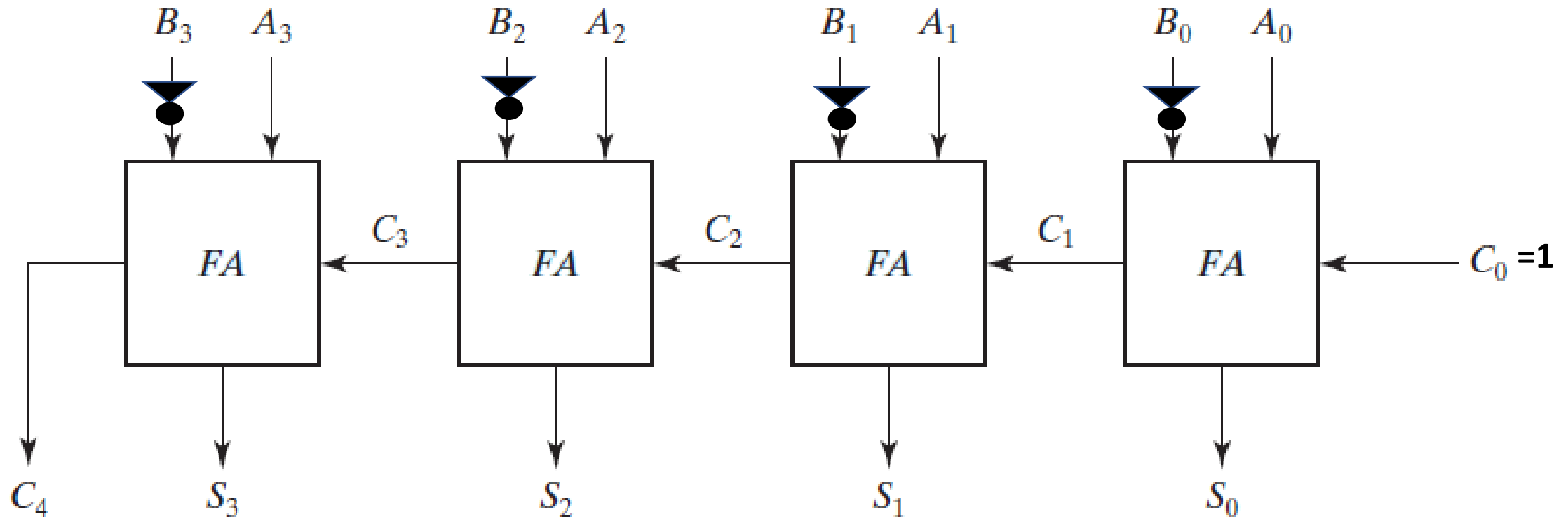
✓ مکمل ۱ را با استفاده از گیت **NOT** بدست می آوریم و عدد ۱ را از طریق ورودی نقلی به آن اضافه می کنیم.

✓ **بنابراین**، مدار تفریق گر $A-B$ متشکل از یک جمع کننده (چند اسلاید قبلی) با **NOT** های واقع در بین ورودی های B . ضمناً رقم نقلی ورودی باید برابر $c_0=1$ شود.

✓ برای اعداد بدون علامت اگر $A \geq B$ باشد آنگاه $A-B$ تولید می شود. ولی اگر $A < B$ باشد آنگاه $B-A$ تولید خواهد شد.

برای اعداد علامتدار، نتیجه برابر $A-B$ خواهد بود به شرط اینکه سرریز رخ نداده باشد.

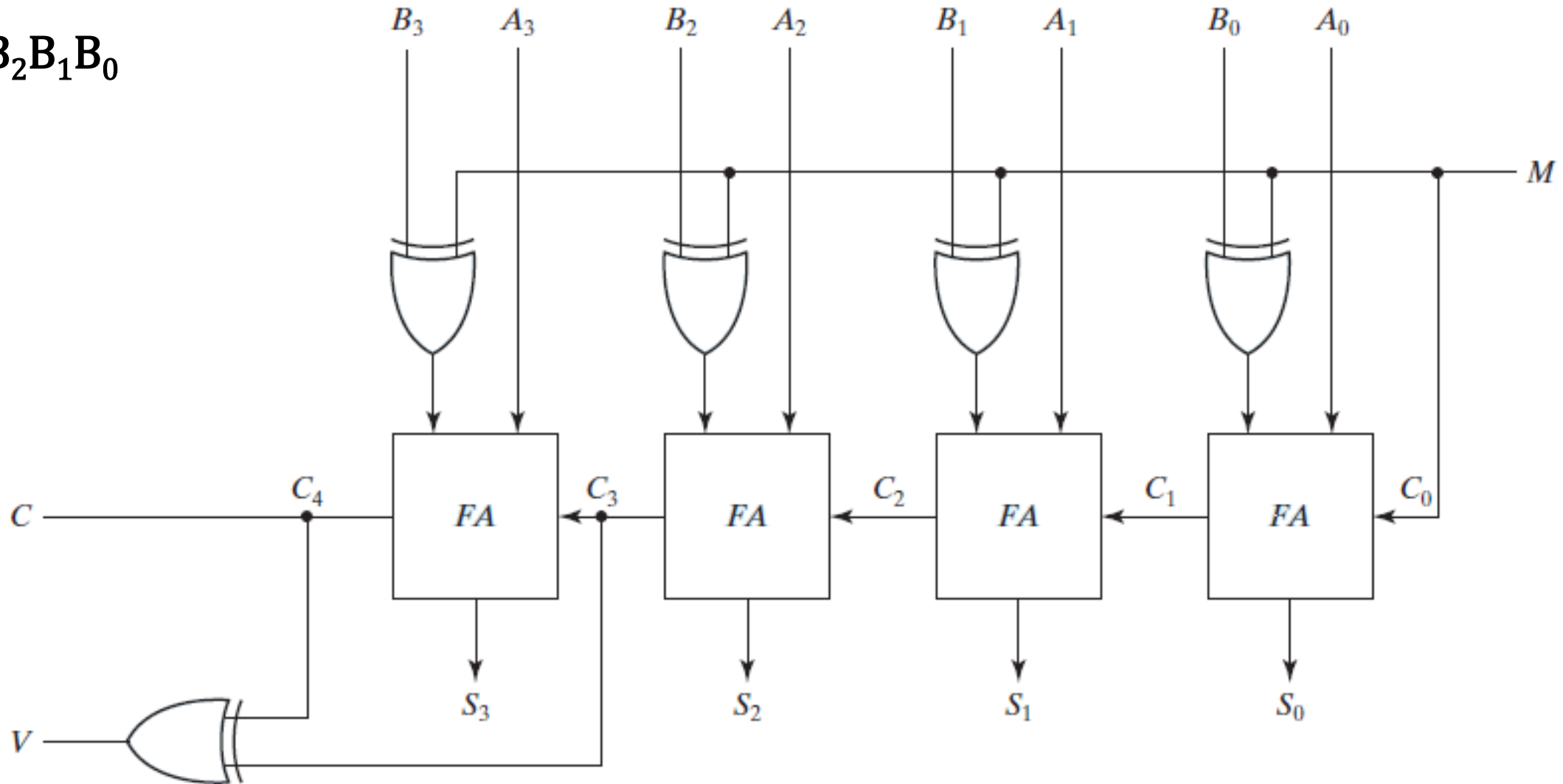
✓ بلوک دیاگرام تفریق گر دودویی ۴ بیتی



✓ بلوک دیاگرام جمع کننده- تفریق گر دودویی ۴ بیتی (توضیحات مورد نیاز در اسلاید بعدی)

$$A = A_3A_2A_1A_0$$

$$B = B_3B_2B_1B_0$$



✓ در مدار قبلی، اگر $M=0$ باشد مدار یک جمع کننده خواهد بود چون خروجی گیت‌های XOR برابر $B \cdot 0' + B' \cdot 0 = B$ خواهد بود و در واقع $A+B$ محاسبه می‌شود.

✓ ولی اگر $M=1$ باشد خروجی گیت‌های XOR برابر $B \cdot 1' + B' \cdot 1 = B'$ خواهد بود و رقم نقلی ورودی برابر $c_0=1$ خواهد بود. بنابراین $A-B$ محاسبه می‌شود.

✓ متغیر V امکان سرریز را نشان می‌دهد. $V = c_3 \oplus c_4$ موقعی برابر یک است که c_3 و c_4 با هم متفاوت باشند یعنی $c_3=1$ و $c_4=0$ یا $c_3=0$ و $c_4=1$

ضرب دودویی دو عدد ۲ بیتی

✓ برای ضرب عدد $B=B_1B_0$ (بعنوان مضروب) در عدد $A=A_1A_0$ (بعنوان مضروب فیه) باید تک تک بیت ها در یکدیگر ضرب شوند و نتیجه حداکثر ۴ بیتی بصورت $C=C_3C_2C_1C_0$ خواهد بود.

مضروب	B_1	B_0
مضروب فیه	A_1	A_0
	A_0B_1	A_0B_0
	A_1B_1	A_1B_0
C_3	C_2	C_1

